

Barem de notare – clasa a V-a

Problema 1. Aflați ultimele trei cifre ale numărului nenul n , știind că prin împărțirea lui $29 \cdot n$ la 250 obținem restul 67, iar prin împărțirea lui $23 \cdot n$ la 200 obținem restul 29.

Gazeta matematică

Soluție:

Din teorema împărțirii cu rest avem relațiile:

$$\begin{cases} 29n = 250x + 67 & (1) \\ 23n = 200y + 29 & (2) \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

Înmulțind relația (1) cu 4 și relația (2) cu 5 obținem:

$$\begin{cases} 116n = 1000x + 268 & (3) \\ 115n = 1000y + 145 & (4) \end{cases} \dots\dots\dots 2p$$

Scăzând membru cu membru relațiile (3) și (4) obținem:

$$\{n = 1000(x - y) + 123 \dots\dots\dots 2p$$

$$U_3(n) = U_3(1000(x - y) + 123) = \underline{123} \dots\dots\dots 2p$$

Problema 2. Să se determine $n \in N^*$ și cifrele a, b, c știind că are loc relația:

$$\overline{abc} + 2 \cdot \overline{abc} + 2^2 \cdot \overline{abc} + \dots + 2^n \cdot \overline{abc} = 2^{2n+1} - 2^n.$$

Soluție:

$$\overline{abc}(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n) = 2^{2n+1} - 2^n \dots\dots\dots 1p$$

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$2^{2n+1} - 2^n = 2^n \cdot (2^{n+1} - 1) \dots\dots\dots 1p$$

$$\overline{abc} = 2^n \dots\dots\dots 1p$$

$$n \in \{7, 8, 9\} \Rightarrow (a, b, c) \in \{(1, 2, 8); (2, 5, 6); (5, 1, 2)\} \dots\dots\dots 2p$$

Problema 3. Fie A o mulțime de numere naturale care îndeplinește simultan condițiile:

- a) $2 \in A, 3 \in A$;
- b) Dacă $x \in A$, atunci $4x \in A$;
- c) Dacă $5x - 2 \in A$, atunci $x \in A$.

Arătați că $26 \in A$ și $154 \in A$.

Soluție:

$$2 \in A \Rightarrow 4 \cdot 2 = 8 \in A \Rightarrow 4 \cdot 8 = 32 \in A \Rightarrow 4 \cdot 32 = 128 \in A \dots\dots\dots 2p$$

$$128 = 5 \cdot 26 - 2 \in A \Rightarrow 26 \in A \dots\dots\dots 1,5p$$

$$3 \in A \Rightarrow 4 \cdot 3 = 12 \in A \Rightarrow 4 \cdot 12 = 48 \in A \Rightarrow 4 \cdot 48 = 192 \in A \Rightarrow 4 \cdot 192 = 768 \in A \dots\dots\dots 2p$$

$$768 = 5 \cdot 154 - 2 \in A \Rightarrow 154 \in A \dots\dots\dots 1,5p$$

Problema 4. Să se arate că următoarele numere nu sunt pătrate perfecte:

$$a = 2^n \cdot 3^{n+1} + 2^{n+1} \cdot 3^n, n \in \mathbb{N} \quad \text{și} \quad b = 5^{34} + 5^{17}.$$

Soluție:

$$a = 2^n \cdot 3^n \cdot (3 + 2) = 2^n \cdot 3^n \cdot 5 \dots\dots\dots 1p$$

$$a \text{ se divide cu } 5 \text{ dar nu se divide cu } 5^2 \dots\dots\dots 1,5p$$

$$\text{Deci } a \text{ nu este pătrat perfect.} \dots\dots\dots 0,5p$$

$$u(b) = 0 \dots\dots\dots 0,5p$$

$$b = 5^{17} \cdot (5^{17} + 1) \dots\dots\dots 0,5p$$

$$\text{Observăm că } 5^{17} \cdot 5^{17} < 5^{17} \cdot (5^{17} + 1) < (5^{17} + 1) \cdot (5^{17} + 1) \text{ deoarece } 5^{17} < 5^{17} + 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Deci } (5^{17})^2 < b < (5^{17} + 1)^2 \dots\dots\dots 0,5p$$

$$\text{Cum } b \text{ este cuprins între două pătrate perfecte consecutive nu este pătrat perfect.} \dots\dots\dots 0,5p$$

Barem de notare – clasa a VI-a

Problema 1. Fie a, b două numere naturale nenule astfel încât 7 divide $2a+3b$. Arătați că 7 divide $4a^2+5b^2$.

Gazeta matematică

Soluție:

$$7 \mid 2a+3b \Rightarrow 2a+3b=7k, k \in \mathbb{N}^* \quad 2p$$

$$2a=7k-3b \quad 1p$$

$$4a^2=(2a)^2=(7k-3b)^2=7^2k^2-42kb+9b^2 \quad 2p$$

$$4a^2+5b^2=7^2k^2-42kb+9b^2+5b^2=7^2k^2-42kb+14b^2=7(7k^2-6kb+2b^2) \Rightarrow 7 \mid 4a^2+5b^2. \quad 2p$$

Problema 2. a) Arătați că: $\frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}, n, k \in \mathbb{N}^*$.

b) Comparați numerele:

$$a = \frac{4}{1 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 9} + \frac{4}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{4}{2013 \cdot 2017}$$

$$b = \frac{5}{1 \cdot 6} + \frac{5}{6 \cdot 11} + \frac{5}{11 \cdot 16} + \dots + \frac{5}{2011 \cdot 2016}$$

$$\text{Soluție: a) } \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} = \frac{n+k-n}{n(n+k)} = \frac{k}{n(n+k)} \quad 2p$$

$$\text{b) } a = \frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2017} \quad 1p$$

$$a = 1 - \frac{1}{2017} \quad 1p$$

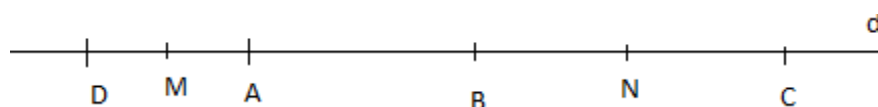
$$b = \frac{1}{1} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2016} \quad 1p$$

$$b = 1 - \frac{1}{2016} \quad 1p$$

$$\text{Cum } \frac{1}{2017} < \frac{1}{2016} \Rightarrow a > b. \quad 1p$$

Problema 3. Punctele A, B, C, D aparțin dreptei d, astfel încât $3AB=2BC$, $AB+BC=15$ cm, iar $[BC] \equiv [BD]$. Calculați distanța dintre mijlocul segmentului $[AD]$ și mijlocul segmentului $[BC]$.

Soluție: Cazul I. Ordinea punctelor este D-A-B-C.



$$3AB=2BC \Rightarrow AB=2k, BC=3k, k \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Cum } AB+BC=15 \text{ cm} \Rightarrow k=3, \text{ deci } AB=6 \text{ cm și } BC=9 \text{ cm}$$

0,5p

$$[BC] \equiv [BD] \Rightarrow BC=BD=9 \text{ cm}$$

$$AD=BD-AB= 9 \text{ cm} - 6 \text{ cm}=3 \text{ cm}$$

1p

$$M \text{ mijlocul } [AD] \Rightarrow AM = MD = \frac{AD}{2} = 1,5 \text{ cm}$$

1p

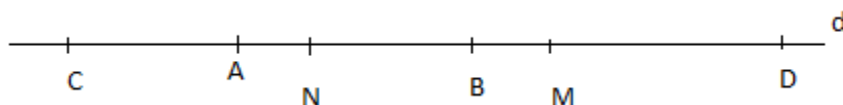
$$N \text{ mijlocul } [BC] \Rightarrow BN = NC = \frac{BC}{2} = 4,5 \text{ cm}$$

1p

$$MN=MA+AB+BN=12 \text{ cm.}$$

0,5p

Cazul II. Ordinea punctelor este C-A-B-D



$$AD = AB+BD = 15 \text{ cm}$$

0,5p

$$M \text{ mijlocul } [AD] \Rightarrow AM = MD = \frac{AD}{2} = 7,5 \text{ cm}$$

0,5p

$$N \text{ mijlocul } [AC] \Rightarrow BN = NC = \frac{BC}{2} = 4,5 \text{ cm}$$

0,5p

$$AN = NC-AC = 1,5 \text{ cm}$$

0,5p

$$MN= AM-AN = 6 \text{ cm.}$$

1p

Problema 4. În jurul punctului O se construiesc n unghiuri, astfel încât $m(\angle A_0OA_1)=1^\circ$, $m(\angle A_1OA_2)=2^\circ$, $m(\angle A_2OA_3)=3^\circ$, ..., $m(\angle A_{n-1}OA_n)=n^\circ$.

- a) Care este valoarea cea mai mare posibilă a lui n?
- b) Pentru n maxim posibil, demonstrați că $\angle A_5OA_{14}$ este unghi drept.
- c) Calculați, pentru același n, măsura unghiului format de bisectoarea unghiului $\angle A_2OA_3$ și bisectoarea unghiului $\angle A_{13}OA_{14}$.

Soluție:

$$a) 1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + \dots + n^\circ < 360^\circ \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} < 360^\circ \Rightarrow n=26^\circ \quad 2p$$

$$b) n=26^\circ \Rightarrow m(\angle A_5OA_{14}) = m(\angle A_5OA_6) + m(\angle A_6OA_7) + \dots + m(\angle A_{13}OA_{14}) = 6^\circ + 7^\circ + \dots + 14^\circ = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A_5OA_{14} \text{ este unghi drept.} \quad 2p$$

$$c) [OM \text{ bisectoarea } \angle A_2OA_3 \Rightarrow m(\angle A_2OM) = m(\angle MOA_3) = 1^\circ 30' \quad 1p$$

$$[ON \text{ bisectoarea } \angle A_{13}OA_{14} \Rightarrow m(\angle A_{13}ON) = m(\angle NOA_{14}) = 7^\circ \quad 1p$$

$$m(\angle MON) = m(\angle MOA_3) + m(\angle A_3OA_4) + \dots + m(\angle A_{12}OA_{13}) + m(\angle A_{13}ON)$$

$$= 1^\circ 30' + 4^\circ + \dots + 13^\circ + 7^\circ = 93^\circ 30'. \quad 1p$$

Barem de notare – clasa a VII-a

Problema 1. a) Determinați numerele naturale n , de patru cifre, astfel încât $\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{n}}} \in \mathbb{N}$.

b) Comparați numerele $\sqrt{2^{\sqrt{3}}}$ și $\sqrt{3^{\sqrt{2}}}$.

Soluție:

a) $\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{n}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{3^4 \cdot 2^2 \cdot n}}} \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 1p$

Numărul obținut se poate scrie și sub forma $\sqrt[8]{3^4 \cdot 2^2 \cdot n} \in \mathbb{N}$

Obținem $n = 3^{4a} \cdot 2^{8b-2}$, a număr natural impar și $b \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 1p$

Pentru $a=b=1$ obținem $n = 3^4 \cdot 2^6 = 81 \cdot 64 = 5184$ - soluție.....0,5p

Dacă $a=1, b=2$ obținem $n = 3^4 \cdot 2^{14} > \overline{xyzt}$

Dacă $a=3, b=1$ obținem $n = 3^{12} \cdot 2^6 > \overline{xyzt} \dots\dots\dots 0,5p$

Deci unica soluție este $n=5184$.

b) Fie $x = \sqrt{2^{\sqrt{3}}}$ și $y = \sqrt{3^{\sqrt{2}}}$, atunci avem:

$$x^2 = \left(\sqrt{2^{\sqrt{3}}}\right)^2 = \sqrt{2^{2\sqrt{3}}} = 2^{\sqrt{3}} \text{ și } y^2 = \left(\sqrt{3^{\sqrt{2}}}\right)^2 = \left(\sqrt{3^2}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}} \dots\dots\dots 1,5p$$

$$\left(x^2\right)^{\sqrt{2}} = \left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{6}} < 2^3 = 8 \text{ și } \left(y^2\right)^{\sqrt{2}} = \left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 3^2 = 9 \dots\dots\dots 2p$$

Obținem $x^2 < y^2$ și cum x, y sunt numere pozitive, rezultă $x < y$0,5p

Problema 2. a) Determinați $(x; y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{2^x} + \sqrt{2^y} = 33$.

b) Se dă numărul $x = \sqrt{\underbrace{44\dots44}_{2\text{ cifre}} - \underbrace{88\dots88}_{n\text{ cifre}}}$ unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Arătați că x este număr natural.

Soluție:

a) Dacă cel puțin unul din numerele x și y este impar, expresia $\sqrt{2^x} + \sqrt{2^y}$ este număr irațional, deci $\sqrt{2^x} + \sqrt{2^y} \neq 33$ **0,5p**

Deducem că x și y sunt numere pare. Fie $x = 2n, y = 2m$ cu $m, n \in \mathbb{N}$ **0,5p**

Egalitatea dată devine $2^n + 2^m = 33$ **0,5p**

33 este un număr impar, deci 2^n și 2^m au parități diferite. **0,5p**

Dacă $2^n = \text{par}$ și $2^m = \text{impar} \Rightarrow m = 0$, iar $2^n + 1 = 33 \Rightarrow 2^n = 32 \Rightarrow n = 5$

Deci $x=10$ și $y=0$ **0,5p**

Dacă $2^n = \text{impar}$ și $2^m = \text{par}$, soluția este $x=0$ și $y=10$ **0,25p**

Problema are două soluții: $(10;0)$ și $(0;10)$ **0,25p**

b) Fie $a = \underbrace{11\dots11}_{n\text{ cifre}}$.

Obținem $x = \sqrt{4 \cdot (a \cdot 10^n + a) - 8a}$ **1p**

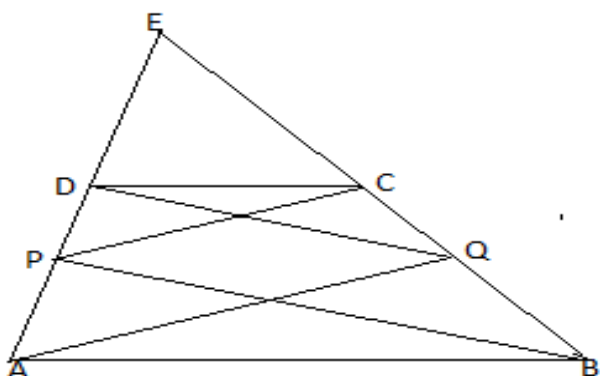
$x = \sqrt{4 \cdot (a \cdot 10^n + a - 2a)} = 2 \cdot \sqrt{a \cdot (10^n - 1)}$ **1p**

Rezultă $x = 2 \cdot \sqrt{a \cdot \underbrace{99\dots99}_{n\text{ cifre}}} = 2\sqrt{a \cdot 9a} = 2\sqrt{9a^2} = 2 \cdot 3a = 6a$ **1,5p**

Deci $x = \underbrace{66\dots66}_{n\text{ cifre}}$ **0,5p**

Problema 3. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$ ($AB > CD$), pe latura $[AD]$ se ia un punct P , iar pe latura $[BC]$ un punct Q , astfel încât $AQ \parallel PC$. Demonstrați că $PB \parallel DQ$.

Soluție:



Fie $AD \cap CB = \{E\}$ 1p

În $\triangle EAB$, $CD \parallel AB \xrightarrow{T.Th} \frac{ED}{EA} = \frac{EC}{EB} (1)$ 2p

În $\triangle EAQ$, $PC \parallel AQ \xrightarrow{T.Th} \frac{EP}{EA} = \frac{EC}{EQ} (2)$ 2p

Împărțind relațiile (1) și (2) membru cu membru obținem:

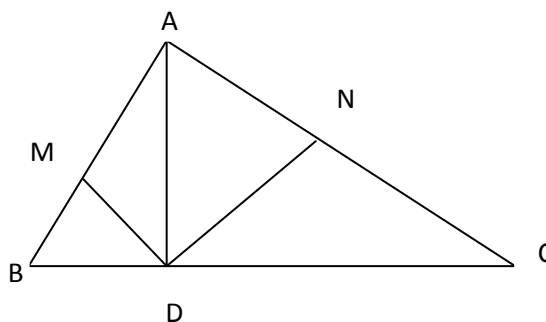
$\frac{ED}{EP} = \frac{EQ}{EB} \xrightarrow{T.R.Th} DQ \parallel PB$ 2p

Problema 4. Fie $\triangle ABC$ cu $m(\angle A) = 90^\circ$, $D \in (BC)$, $AD \perp BC$ și punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$

astfel încât $MA \cdot NA = MB \cdot NC$.

Demonstrați că $m(\angle MDN) = 90^\circ$.

Gazeta matematică



Soluție:

$$MA \cdot NA = MB \cdot NC \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{NA}{NC} \quad (1) \dots\dots\dots 0,5p$$

$$\text{Presupunem că } [DN \text{ bisectoarea } \angle ADC \xrightarrow{T.bis.} \frac{AD}{CD} = \frac{NA}{NC} \quad (2) \dots\dots\dots 1,5p$$

$$\text{Presupunem că } [DM \text{ bisectoarea } \angle ADB \xrightarrow{T.bis.} \frac{DB}{DA} = \frac{MB}{MA} \quad (3) \dots\dots\dots 1,5p$$

$$\text{Din (1),(2),(3)} \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{DB}{DA} \quad (4) \text{ care trebuie demonstrată.} \dots\dots\dots 1p$$

Dar $\triangle ADB \sim \triangle CDA (U.U) \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{DB}{DA} \Rightarrow$ presupunerile făcute sunt adevărate, ținând cont și de unicitatea punctelor M și N care împart interior un segment în același raport..... 2p

$$\text{Obținem } m(\angle MDN) = 90^\circ \dots\dots\dots 0,5p$$

Barem de notare – clasa a VIII-a

Problema 1. a) Determinați numerele reale a, b, c știind că $a^2 + b^2 + c^2 = 14$ și $2a + 4b + 6c = 28$.

b) Fie $t = (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (a\sqrt{2} + b\sqrt{3})$, unde a și b sunt numere întregi. Dacă t este număr rațional calculați $x = a|b| + b|a|$.

Soluție:

a) Din relațiile date obținem: $2a + 4b + 6c = a^2 + b^2 + c^2 + 14$ **1p**

Relația de mai sus se scrie: $(a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 4b + 4) + (c^2 - 6c + 9) = 0$ **1p**

Rezultă: $(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = 0$ **1p**

Cum fiecare termen al sumei este nenegativ $\Rightarrow a-1 = b-2 = c-3 = 0$**0,5p**

Deci: $a = 1, b = 2, c = 3$**0,5p**

b) Numărul dat se scrie: $t = (2a + 3b) + \sqrt{6}(a + b)$ **0,5p**

Rezultă: $\sqrt{6}(a + b) = t - (2a + 3b)$ **0,5p**

Deoarece membrul drept al egalității este număr rațional $\Rightarrow \sqrt{6}(a + b) \in \mathbb{Q}$ **0,5p**

Cum $(a + b) \in \mathbb{Z}$ și $\sqrt{6} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a$ **1p**

Obținem $x = a|-a| - a|a| = 0$ **0,5p**

Problema 2. Rezolvați ecuația:

$$\frac{x^2+1}{2} + \frac{2x^2+1}{3} + \frac{3x^2+1}{4} + \dots + \frac{2015x^2+1}{2016} = 2015.$$

Soluție:

Ecuația dată este echivalentă cu:

$$\left(\frac{x^2+1}{2} - 1\right) + \left(\frac{2x^2+1}{3} - 1\right) + \left(\frac{3x^2+1}{4} - 1\right) + \dots + \left(\frac{2015x^2+1}{2016} - 1\right) = 0 \quad \dots\dots\dots 2p$$

După efectuarea calculelor în fiecare paranteză obținem:

$$\frac{x^2-1}{2} + \frac{2x^2-2}{3} + \frac{3x^2-3}{4} + \dots + \frac{2015x^2-2015}{2016} = 0 \quad \dots\dots\dots 1p$$

Scoatem factor comun la numărători, unde este cazul, și obținem:

$$\frac{x^2-1}{2} + \frac{2(x^2-1)}{3} + \frac{3(x^2-1)}{4} + \dots + \frac{2015(x^2-1)}{2016} = 0 \quad \dots\dots\dots 1p$$

Scoatem $x^2 - 1$ factor comun și avem:

$$(x^2 - 1) \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2015}{2016} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots 1p$$

Dar al doilea factor este un număr pozitiv, fiind o sumă de numere strict pozitive. 1p

$$\text{Deci } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

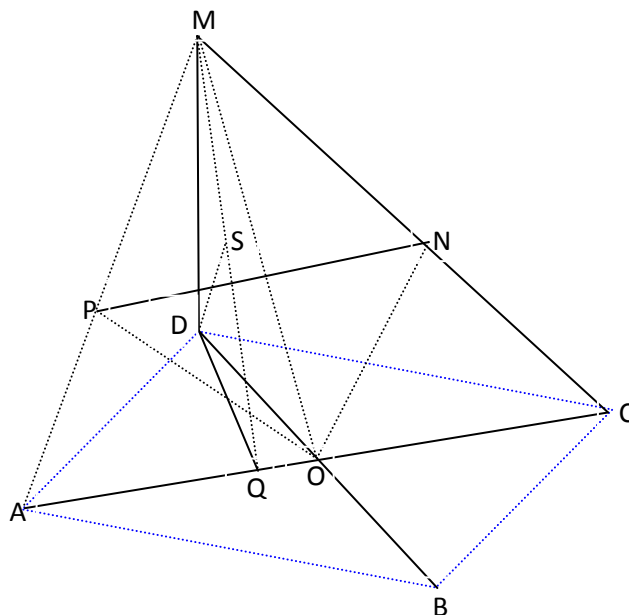
$$\text{Obținem: } S = \{1; -1\} \quad \dots\dots\dots 1p$$

Problema 3. În vârful D al dreptunghiului ABCD se duce perpendiculara pe planul acestuia, pe care se ia un punct M. Fie $AC \cap BD = \{O\}$ și $[ON]$ este bisectoarea $\angle MOC$, $N \in (MC)$. Considerăm un punct $P \in (MA)$ astfel încât proiecția lui P pe dreapta ON este punctul O.

Dacă $AB=4\text{cm}$, $BC=3\text{cm}$ și $d(M, AC)=\frac{12}{5}\sqrt{2}$ determinați:

a) măsura unghiului dintre PN și planul (ABC);

b) distanța de la punctul D la planul (MAC).



Soluție:

a) $m(\angle AOP) = 180^\circ - 90^\circ - m(\angle NOC) = 90^\circ - m(\angle NOM) = m(\angle POM) \Rightarrow [OP \text{ bisectoarea } \angle MOA] \dots\dots\dots 1p$

Aplicând teorema bisectoarei în triunghiurile MOC respectiv MOA obținem:

$$\frac{MN}{NC} = \frac{MO}{OC} \text{ respectiv } \frac{MP}{PA} = \frac{MO}{OA} \dots\dots\dots 1p$$

Dar $OC = OA \Rightarrow \frac{MN}{NC} = \frac{MP}{PA} \xrightarrow{T.R.Th} PN \parallel AC \dots\dots\dots 0,5p$

Cum $PN \parallel AC, AC \subset (ABC) \Rightarrow PN \parallel (ABC) \Rightarrow m\angle[PN, (ABC)] = 0^\circ \dots\dots\dots 0,5p$

b) Fie $DQ \perp AC$. Cum $MD \perp (ABC)$, $DQ \cap AC = \{Q\} \xrightarrow{T_{3\perp}} MQ \perp AC \dots\dots\dots 1p$

Avem $DQ \perp AC$, $MQ \perp AC$ și fie $DS \perp MQ$, $MQ \cap AC = \{Q\} \xrightarrow{T.R.T_{3\perp}} DS \perp (MAC)$

Rezultă că $d[D, (MAC)] = DS \dots\dots\dots 1p$

În $\triangle ADC$ folosind $T.P$ și $T.h_2$ obținem: $AC = 5$ și $DQ = \frac{12}{5} \dots\dots\dots 1p$

În $\triangle MDQ \Rightarrow \cos Q = \frac{DQ}{MQ} \Rightarrow \cos Q = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m\angle(MQD) = 45^\circ \dots\dots\dots 0,5p$

$\triangle MDQ$ dreptunghic isoscel în D și cum $[DS]$ înălțime $\Rightarrow [DS]$ mediană.

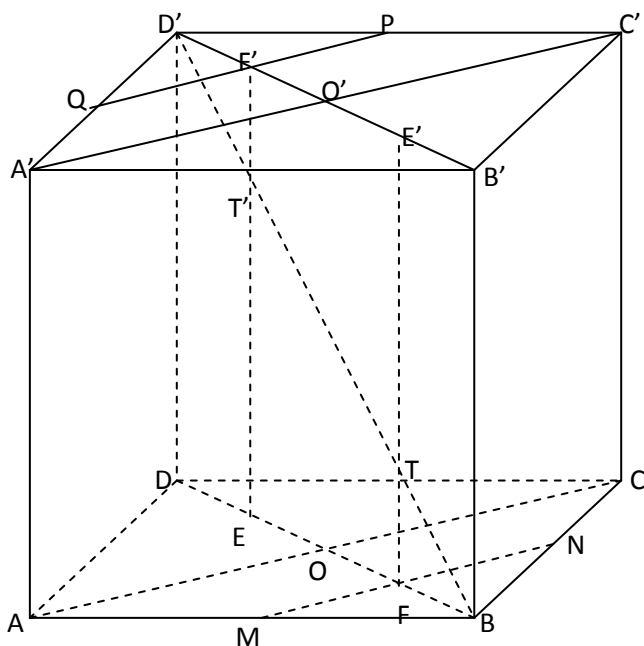
Deci $DS = \frac{MQ}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{5} \dots\dots\dots 0,5p$

Problema 4. Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$. Considerăm punctele $E \in (BD)$ astfel încât $BD = 4DE$ și $E' \in (B'D')$ astfel încât $D'E' = 3B'E'$. Dacă M, N, P, Q sunt mijloacele muchiilor $AB, BC, D'C',$ respectiv $A'D'$, arătați că:

- Planele (EPQ) și $(E'MN)$ sunt paralele;
- Dacă $BD' \cap (E'MN) = \{T\}$ și $BD' \cap (EPQ) = \{T'\}$, atunci $TT' = 2BT$.

Gazeta matematică

Soluție:



- Fie $MN \cap BD = \{F\}$, $QP \cap B'D' = \{F'\}$, $AC \cap BD = \{O\}$, $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$.

În $\triangle ABC$, $[MN]$ linie mijlocie $\Rightarrow MN \parallel AC$ (1). Analog în $\triangle A'D'C' \Rightarrow QP \parallel A'C'$ (2).....1p

Din relațiile (1),(2) și cum $AC \parallel A'C' \Rightarrow QP \parallel MN$ (3)0,5p

În $\triangle ABC$, $[MN]$ linie mijlocie, $[BO]$ ceviană $\xrightarrow{prop.} F$ mijlocul $[BO]$ 0,5p

Analog în $\triangle A'D'C'$ obținem F' mijlocul segmentului $D'O'$ 0,5p

Din $B'E' = \frac{D'E'}{3} \Rightarrow B'E' = \frac{B'D'}{4} = \frac{O'B'}{2} \Rightarrow E'$ mijlocul lui $[B'O']$ 0,5p

Cum $DE = \frac{BD}{4} = \frac{2DO}{4} = \frac{DO}{2} \Rightarrow E$ mijlocul lui $[DO]$ 0,5p

Obținem $EF = E'F'$ și cum $EF \parallel E'F' \Rightarrow EFE'F'$ paralelogram $EF' \parallel E'F$ (4).....1p

Din relațiile (3) și (4), obținem conform teoremei planelor paralele că $(EPQ) \parallel (E'MN)$...0,5p

b) Avem : $BD' \cap E'F = \{T\}, E'F \subset (E'MN) \Rightarrow T \in (E'MN)$

$BD' \cap EF' = \{T'\}, EF' \subset (EPQ) \Rightarrow T' \in (EPQ)$ 0,5p

În $\triangle BET'$, $TF \parallel T'E \xrightarrow{T.Th} \frac{BT}{TT'} = \frac{BF}{FE} = \frac{BF}{2BF} = \frac{1}{2} \Rightarrow BT = 2TT'$ 1,5p